Scientific Research Centre
"MachineStructure"

CreateSpace, An Amazon Company

ISSN 2572-4347

Journal of Advanced Research in Natural Science

Issue 2

North Charleston, USA, 2017

Journal of Advanced Research in Natural Science. –
North Charleston, USA: SRC MS, CreateSpace. –
2017. – Issue 2. – 56 p.

ISSN 2572-4347

<u>*Themes of journal:*</u>

1. Physics and mathematics Sciences:

1.1. Mathematics: Differential equations; Mathematical physics; Geometry; Probability theory and mathematical statistics; Logic; Computational mathematics; Cybernetics.

1.2. Mechanics: Theoretical mechanics; Mechanics of solids; fluid Mechanics; Dynamics and strength of machines, devices and instrumentation; Biomechanics.

1.3. Astronomy: Celestial mechanics; Astrophysics; Planetary researches.

1.4. Physics: Theoretical physics; Experimental physics; Physical electronics; Optics and acoustics; Condensed matter physics; Physics of magnetic phenomena; thermal physics and thermal engineering; Physics and technology of nanostructures; Crystallography; Laser physics; High energy physics.

2. Chemical science: Organic and inorganic chemistry; Analytical chemistry; Physical chemistry; Polymers; Petrochemicals; Mathematical and quantum chemistry; solid state Chemistry; Chemical technology.

3. Biological Sciences: Biotechnology; Bioengineering; Mathematical biology; bioinformatics.

4. Agricultural Sciences: Agronomy; Forestry; Fisheries.

5. Earth science: Geology; Geodynamics; Mineralogy; Hydrogeology; Soil science; prospecting and exploration of mineral deposits; mineral Beneficiation; Technology exploration; Technology of drilling and development wells; mine surveying; Geomechanics, destruction of rocks, miner aerogasdynamics; Geotechnology; Geoinformatics; Ecology.

ISBN: 1546835652 ; ISBN-13: 978-1546835653

CONTENTS

Physics and mathematics sciences

О СОСТАВЛЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЗМА

Адамович Н.О.

Ключевые слова: динамическая модель, теория колебаний, деформация.

Аннотация. В статье излагаются вопросы, относящиеся к методике построения математической модели механизма. Рассмотрены рациональные практические приемы для математического описания динамических моделей с учетом их характерных особенностей.

ABOUT CONSTRUCTION UP OF MATHEMATICAL MODEL OF MECHANISM

Adamovich N.O.

Keywords: dynamic model, theory of oscillations, deformation.

Abstract. The article presents the issues related to the technique of construction mathematical model of movement. Rational practical methods for the mathematical description of dynamic models with regard to their characteristic features.

Каждой физической модели соответствует своя математическая модель, т.е. система дифференциальных или интегральных уравнений, с помощью которых осуществляется математическое описание исследуемого объекта. При построении математической модели в ряде случаев приходится привлекать на помощь некоторые гипотезы и допущения для компенсации недостатка знаний или с целью упрощения самой процедуры математического описания системы и ее дальнейшего анализа.

Например, при учете сил трения мы нередко пользуемся законами Кулона, т.е. оперируем несколько идеализированным трением. На этапе исследования также приходится делать некоторые шаги в направлении идеализации системы.

Выделим следующие этапы составления математической модели. Первый этап предполагает описание связей. Любой механизм можно рассматривать как механическую систему, подчиненную связям, т.е. ограничениям геометрического или кинематического характера. Если уравнение связи может быть представлено в общем виде как функция, не содержащая производных от координат, то эта связь называется голономной. В частности, примером уравнения голономной связи может служить функция положения $\varphi_n = \Pi_n(\varphi_1)$, связывающая зависимостью координаты ведущего и ведомого звеньев. К виду голономной связи могут быть приведены и некоторые зависимости, имеющие форму кинематической связи. Например, задано передаточное отношение зубчатой передачи, соединяющей два вала $i_{21} = \omega_2/\omega_1$. Тогда это уравнение связи может быть проинтегрировано в общем виде

$$\varphi_2 - \varphi_2^0 = \int_{\varphi_1^0}^{\varphi_1} i_{21} d\varphi_1 = i_{21}(\varphi_1 - \varphi_1^0)\,. \qquad (1)$$

Однако i_{21} в некоторых механизмах (например, в вариаторах скорости) может оказаться явной функцией времени. В подобных случаях, когда в уравнении связи не могут быть исключены производные от координат, связь называют неголономной.

Связь называется стационарной, если в уравнение связи в явном виде не входит время, а в противном случае нестационарной. Функцию положения, согласно этому определению, следует отнести к стационарным связям. Однако если можно считать, что φ_1 содержит составляющую, которая заданным образом зависит от времени, то такая связь оказывается нестационарной, например

$$\varphi_2 = \Pi_2(\omega t + \Delta\varphi), \qquad (2)$$

где ωt характеризует текущий идеальный угол ведущего звена, а $\Delta\varphi$ – колебания ведущего звена.

В этом случае нестационарная связь в задачах динамики механизмов возникает как результат идеализации, вызванной стремлением сократить число степеней свободы колебательной системы. В подобных случаях на стадии составления системы дифференциальных уравнений удобнее оперировать уравнениями стационарной связи, не раскрывая связь соответствующей координаты со временем.

Связи называются идеальными, если сумма работ реакций этих связей на любых возможных перемещениях равна нулю. Поскольку в реальных механизмах всегда имеет место тангенциальная составляющая реакций связей, равная силе трения, то любая связь практически оказывается неидеальной. Тем не менее, в практике можно пользоваться представлением об идеальных связях, если вводить силы трения в соответствующие уравнения как активные силы. При этом должны быть учтены дополнительные соотношения, которые определяются законами трения, выявленными экспериментальным путем.

Следующим этапом составления математической модели является выбор обобщенных координат. Одним из наиболее важных характеристик любой модели является число степеней свободы, которое для голономных систем определяется числом независимых координат, полностью описывающих положение каждой точки системы. Эти координаты называются обобщенными и обозначаются q_1, q_2,…q_H, где H – число степеней свободы. Таким образом, число обобщенных координат одновременно является минимальным числом координат, которыми можно описать все возможные положения голономной системы. Наряду с обобщенными координатами при исследовании динамики механизмов нередко целесообразно пользоваться некоторыми вспомогательными координатами, связанными с обобщенными координатами уравнениями связи. Координаты такого вида называют избыточными.

Следующий этап – определение инерционных коэффициентов. Выразим кинетическую энергию голономной системы, включающей N масс,

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i V_i^2 , \qquad (3)$$

как функцию обобщенных скоростей и обобщенных координат.

Так как все радиус-векторы r_i зависят от обобщенных координат, а при нестационарных связях еще и от времени, то

$$r_i = r_i(q_1,...,q_H,t) , \qquad (4)$$

$$\mathrm{V_i} = \sum_{j=1}^{H} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} . \qquad (5)$$

Далее подставив (5) в (3), получим для кинетической энергии следующее выражение

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\sum_{j=1}^{H}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)\left(\sum_{k=1}^{H}\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{H}\sum_{k=1}^{H}A_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{j=1}^{H}B_j\dot{q}_j+T_0. \quad (6)$$

Здесь принято

$$\mathrm{A}_{\mathrm{jk}}=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right); \quad (7)$$

$$B_j=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial t}\right); \quad (8)$$

$$\mathrm{T}_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)^2. \quad (9)$$

С учетом сделанных допущений примем, что исходная динамическая модель механизма имеет только стационарные связи. Тогда согласно (8), (9) $B_j=0$, $T_0=0$ и кинетическая энергия описывается однородной функцией обобщенных скоростей с коэффициентами A_{jk}, являющимися в общем случае некоторыми функциями обобщенных координат. В частном случае может оказаться, что $A_{jk} = a_{jk} = const$. Тогда на основании (6)

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{H}\sum_{k=1}^{H}a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \quad (10)$$

причем a_{jk} называют инерционными коэффициентами.

К такому же результату можно придти, если считать, что все обобщенные координаты являются малыми. В развернутом виде зависимость (10) для кинетической энергии имеет следующий вид:

$$\mathrm{H}=1;\ \mathrm{T}=\frac{1}{2}a_{11}\dot{q}_1^2;$$

$$\mathrm{H}=2;\ \mathrm{T}=\frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2+a_{22}\dot{q}_2^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2); \quad (11)$$

$$\mathrm{H}=3;\ \mathrm{T}=\frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2+a_{22}\dot{q}_2^2+a_{33}\dot{q}_3^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+2a_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3+2a_{23}\dot{q}_2\dot{q}_3).$$

Для определения коэффициентов квадратичных форм a_{jk} нет необходимости использовать выражение (7). Практический прием определения этих коэффициентов основан на уравнивании соответствующих членов в выражениях для кинетической энергии, записанных в общем виде (11) и для конкретной системы.

Дальнейший этап предполагает определение обобщенных сил. Сумма элементарных работ на возможных перемещениях может быть представлена в виде

$$\delta W = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_H\delta q_H. \quad (12)$$

Размерные коэффициенты Q_j носят название обобщенных сил и могут иметь размерность силы или момента. При определении обобщенной силы следует для каждого конкретного случая составить выражение вида (12) и уравнять коэффициенты при одинаковых вариациях обобщенных координат δq_j.

Далее решается задача определения квазиупругих коэффициентов. В общем случае потенциальная энергия является функцией обобщенных координат и времени. В механизмах потенциальная энергия, участвующая в колебательном процессе, формируется в основном за счет за счет упругих деформаций.

Предполагая, что функция *П*, характеризующая потенциальную энергию, в окрестности положения равновесия непрерывна и дифференцируема, представим ее в виде

$$\Pi(\mathrm{q}_1,...,q_H,t)=\Pi^0+\sum_{j=1}^{H}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial \mathrm{q}_{\mathrm{j}}}\right)^0 q_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{H}\sum_{k=1}^{H}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_j\partial q_k}\right)^0 q_j q_k+\ldots. \qquad (13)$$

Примем за начало отсчета положение статического равновесия, в котором$(\partial V/\partial q_j)^0=0$. Таким образом, потенциальная энергия в окрестности положения равновесия может быть выражена так:

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{H}\sum_{k=1}^{H}c_{jk}\mathrm{q}_{\mathrm{j}}\,q_k\ , \qquad (14)$$

где c_{jk} – квазиупругие коэффициенты.

Как следует из (13) и (14)

$$c_{jk}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_j\partial q_k}\right)^0. \qquad (15)$$

Однако на практике во многих случаях удобно находить квазиупругие коэффициенты уравниванием коэффициентов квадратичной формы и выражения для потенциальной энергии, отвечающего конкретной системе.

Уравнения Лагранжа второго рода в независимых координатах имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial\Pi}{\partial q_j}=Q_j\ \ (j=1,2,\ldots,H). \qquad (16)$$

Рассмотрим случай, когда кинетическая и потенциальная энергия могут быть представлены в виде квадратичных форм с постоянными коэффициентами. После подстановки (10) и (14) в (16) получаем систему Н дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}
&a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+\ldots+a_{1\mathrm{H}}\ddot{q}_H+c_{11}q_1+c_{12}q_2+\ldots+c_{1H}q_H=Q_1;\\
&a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2\ldots+a_{2\mathrm{H}}\ddot{q}_H+c_{21}q_1+c_{22}q_2+\ldots+c_{2H}q_H=Q_2; \qquad (17)\\
&\ldots\\
&a_{H1}\ddot{q}_1+a_{H2}\ddot{q}_2\ldots+a_{H\mathrm{H}}\ddot{q}_H+c_{H1}q_1+c_{H2}q_2\ldots+c_{HH}q_H=Q_H\ .
\end{aligned}$$

Систему (17) можно воспроизвести, не прибегая к подстановке кинетической и потенциальной энергии в уравнения Лагранжа. Практика инженерных расчетов показывает, что использование инерционных и квазиупругих коэффициентов приводит к разумному автоматизму при составлении математической модели исследуемого объекта, сокращая трудоемкость выкладок и число возможных ошибок на этом этапе.

При составлении системы дифференциальных уравнений для механизмов нередко встречается случай, когда какая-либо координата q_v не входит в выражение потенциальной энергии. Тогда при $A_{jk}= a_{jk} = const$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\nu} = \frac{\partial T}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\nu} = 0. \qquad (18)$$

Координаты q_v, отвечающие условию (18), называют циклическими.

Во многих задачах динамики механизмов, в частности при рассмотрении механизмов с нелинейной функцией положения, оказывается, что коэффициенты A_{jk} в выражении для кинетической энергии (6) не могут быть приняты постоянными, так как одна или несколько обобщенных координат не являются малыми величинами. Такой обобщенной координатой, например, является текущий идеальный угол поворота ведущего звена большинства механизмов. Если в подобном случае обобщенная координата q_v не входит в выражение для потенциальной энергии, но от нее зависит в явном виде кинетическая энергия, то

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{q}_\nu} = 0; \ \frac{\partial T}{\partial q_\nu} \neq 0.$$

Подобную координату называют квазициклической. В случае $A_{jk} \neq const$ при подстановке функции T в уравнение Лагранжа второго рода (16) приходится осуществлять дифференцирование сложных выражений. Существенное упрощение может быть достигнуто, если устранить необходимость выражения всех координат системы через обобщенные координаты введением избыточных координат.

Список литературы

1. Вульфсон И.И. Введение в динамику механизмов с учетом упругости звеньев: Учебное пособие – Л.: Ленинградский политехнический институт им. Калинина, 1977. – 44 с.

References

1. Vulfson I.I. Introduction to dynamics of mechanisms, taking into account the elasticity of links: tutorial – L: Leningrad Polytechnic Institute named Kalinin, 1977. – 44 p.

Адамович Наталья Олеговна – к.т.н., доцент, доцент кафедры механики и машиностроения, Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк	**Adamovich Natalya Olegovna** – candidate of technical Sciences, associate Professor, Department of mechanics and engineering, Siberian state industrial university, Novokuznetsk

Received 15.05.2017

Scientific periodical issue

ISSN 2572-4347

Journal of Advanced Research in Natural Science

Issue 2

ISBN: 1546835652 ; ISBN-13: 978-1546835653

Founder: Elena V. Zhukova.
Editorial: Scientific Research Centre «MachineStructure».
Editor in chief: Ivan A. Zhukov.
Printed by CreateSpace, Charleston SC.

Publication Date: 20.05.2017.
Title ID: 7187466.
Trim Size: 7” x 10” (17.78 x 25.4 cm).
Number of copies: 50 min.

North Charleston, USA:
Scientific Research Centre «MachineStructure», CreateSpace
2017