Математические структуры и моделирование
2021. № 1(57). С. 4–25

УДК 530.145
DOI 10.24147/2222-8772.2021.1.4-25

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА: II. S-МАТРИЦА

В.В. Варламов
д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. S-матрица определяется в рамках алгебраической формулировки квантовой теории с двоичной структурой.

Ключевые слова: S-матрица, пространство Фока, когерентные подпространства, сепарабельные состояния, физическое гильбертово пространство, спектр масс.

1. Введение

S-матричный метод в квантовой теории был впервые введён Гейзенбергом [1][1] с целью обойти проблему расходимостей в квантовой теории поля. Гейзенберг, исходя из общей идеологии об исключении ненаблюдаемых величин, ввёл S-матрицу как основной объект теории, полностью характеризующий взаимодействие квантовых микрообъектов («элементарных частиц»), который должен строиться непосредственно, без обращения к гамильтониану и связанному с детальным пространственно-временным описанием уравнением Шрёдингера.

Итак, главной предпосылкой введения S-матрицы явилось стремление избежать появления расходимостей в КТП. В связи с этим важно понять причину возникновения подобного рода расходимостей (точнее говоря, первопричину[2]). Ответ находим у Гейзенберга: «…структура пространства и времени, выражаемая специальной теорией относительности, предельно резко отграничивает область одновременности, в которой не может быть передано никакое воздействие, от других областей, в которых непосредственное воздействие одного процесса на другой может иметь место. С другой стороны, соотношение неопределённостей квантовой теории устанавливает жёсткую границу точности, с которой могут быть одновременно измерены координаты и импульсы или моменты времени и энергии. Так как предельно резкая граница означает бесконечную точность фиксации положения в пространстве и во времени, то соответствующие импульсы и энергии должны быть полностью неопределёнными, то есть с подавляющей вероятностью должны выступить на первый план

[1]Исторически первой работой по этой тематике была статья Уилера 1937 г. [2]. Однако эта работа не оказала заметного влияния на развитие теории S-матрицы. Именно формулировка Гейзенберга послужила отправной точкой для последующего построения аналитической теории S-матрицы [3] и аксиоматического S-матричного метода в квантовой теории поля [4].

[2]Расходящиеся фейнмановские интегралы не являются причиной — это следствие.

процессы даже со сколь угодно большими импульсами и энергиями. Поэтому всякая теория, которая одновременно выполняет требования специальной теории относительности и квантовой теории, ведёт, оказывается, к математическим противоречиям, а именно к расходимостям в области очень больших энергий и импульсов» [5, с. 99]. Обсуждая возможность объединения СТО и КМ, Гейзенберг отмечает, что в новой объединённой теории[3] (согласно требованиям СТО) действие должно передаваться из одной точки только непосредственно соседней точке. Таким образом, в объединённой теории (релятивистской квантовой механике, соответственно квантовой теории поля) должна быть реализована *парадигма близкодействия*. Каким же образом реализуется эта парадигма в КТП? Мы видим абсолютно механистическую картину: предполагается, что близкодействие между квантовыми микрообъектами осуществляется посредством обмена частицами-переносчиками взаимодействий (калибровочные бозоны стандартной модели). Теперь на сцене появляется ещё один весьма любопытный феномен: представление о квантовом микрообъекте как о некоей «частице», т. е. как о квазиклассическом макрообъекте, имеющем протяжённость в пространстве (на ультрамалых расстояниях) в виде некоего (в общем случае) сферически симметричного образования (попросту говоря, шарика). Именно таким шариком Лоренц представлял себе электрон[4], вводя понятие «радиуса» электрона:

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2} = 2{,}8179403227(19) \times 10^{-15}\text{м},$$

где ϵ_0 — диэлектрическая постоянная, m_e — масса электрона, c — скорость света. Это соотношение известно как «классический радиус электрона»[5]. Абрагам [8] также рассматривал электрон как сферу с зарядом, равномерно рас-

[3] В 1981 г. Дирак писал: «Я бы сказал, что с задачей приведения в соответствие обычной квантовой механики и четырёхмерной теорией относительности Эйнштейна пока не удалось справиться. Над этой задачей много трудились, но она всё ещё не решена, если не считать нескольких простых случаев, с участием одной частицы» [6, с. 50-51].

[4] Де Бройль отмечает: «В теории Лоренца электрон представляется как маленький отрицательно заряженный шарик с суммарным зарядом $-e$, внутри которого заряд распределён определённым образом. В рамках этого предположения нельзя объяснить, почему электростатическое отталкивание одних частей электрона другими не приводит к взрыву электрона. Для того чтобы обеспечить устойчивость электрона, необходимо предположить, что его поверхность оказывает на внутреннюю область некоторое давление, давление Пуанкаре, которое предотвращает такой взрыв: природа этого давления в теории электронов остаётся невыясненной» [7, с. 240].

[5] В связи с этим уместно вспомнить о так называемой «загадке радиуса протона». Измерения электрического радиуса протона с помощью атомов обычного (электронного) водорода, проводимые разными методами с 1960-х годов, привели к результату $r_p \approx 0{,}88$ фемтометра (1 фм=10^{-15}м). Первые эксперименты с атомами мюонного водорода 2010 г. (где электрон заменён на мюон) дали для этого радиуса на 4 % меньший результат: $r_p \approx 0{,}84$ фм. Далее измерения лэмбовского сдвига в атоме обычного водорода, проведённые в 2019 г., дали значение $r_p \approx 0{,}833$ фм. Позже, в 2019 г., были опубликованы результаты эксперимента PRad, в котором для определения радиуса протона использовалось рассеяние электронов. Результат оказался равен $r_p \approx 0{,}831$ фм. Очевидно, что по мере усовершенствования измерительного оборудования наблюдается следующая последовательность: $0{,}88 \to 0{,}84 \to 0{,}833 \to 0{,}831 \to \ldots \to 0$.

пределённым по её поверхности[6]. Однако такое представление не инвариантно относительно преобразований Лоренца (любая теория, использующая фиксированное время или фиксированное расстояние, нарушает принципы СТО, поскольку в силу эффекта замедления времени и лоренцевых сжатий длины различные наблюдатели будут расходиться в оценках относительно времени и расстояния). Таким образом, СТО накладывает жёсткое ограничение на радиус электрона-шарика, сводя его к точке (шарику радиуса нуль). Поэтому в квантовой электродинамике приходится иметь дело с точечным электроном. Однако «точечноподобное» представление электрона приводит к другой проблеме. Как известно, в релятивистской электродинамике электрическое поле имеет плотность энергии, равную $\epsilon_0/2|\vec{E}|^2$. Следовательно, полная энергия электрического поля точечного заряда пропорциональна

$$\frac{\epsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{E}|^2 d^3x = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{1}{r^4}r^2 dr.$$

Этот интеграл расходится вблизи $r = 0$, т. е. электрическое поле заряженной точечной частицы имеет бесконечную энергию.

В квантовой электродинамике взаимодействие между электронами и фотонами описывается посредством теории возмущений, т. е. в виде разложения в ряд по константе связи, равной постоянной тонкой структуры. В высших порядках теории возмущений (начиная со второго) появляются петлевые диаграммы Фейнмана. Соответствующие этим (петлевым) диаграммам интегралы, содержащие среди величин массу и заряд электрона, расходятся (ультрафиолетовые расходимости). Предполагается, что за счёт эффекта поляризации вакуума вокруг электрона образуется облако виртуальных частиц, которое некоторым образом «экранирует» его заряд и массу. В связи с этим возникают два различных понятия массы и заряда электрона: «голые» $e_{\rm bare}$, $m_{\rm bare}$ и «перенормированные» $e_{\rm ren}$, $m_{\rm ren}$. Вычисление петлевых интегралов осуществляется методом «обрезания», т. е. интегрирование проводится в рамках некоторого ограниченного региона (шара радиуса Λ). Далее $e_{\rm bare}$ и $m_{\rm bare}$ выбираются так, чтобы $e_{\rm ren}$ и $m_{\rm ren}$ согласовывались с экспериментально наблюдаемыми значениями заряда и массы электрона. При этом «голые» заряд и масса электрона зависят от параметра Λ: $e_{\rm bare}(\Lambda)$ и $m_{\rm bare}(\Lambda)$. Такая процедура называется «перенормировкой». Однако при переходе к пределу $\Lambda \to \infty$ вновь возникают расходимости (появление полюсов Ландау)[7]. Дирак отмечает: «Неприятность состоит в том, что эффект перенормировки бесконечно велик, если электрон считается точечной частицей. Точно также появляется и перенормировка заряда: исходный заряд производит поляризацию вакуума и тем самым отчасти нейтрализуется. Этот

[6]Уленбек и Гаудсмит [9] в попытке дать механическое объяснение спина электрона, представляли электрон в виде вращающегося шарика (волчка). Как отметил Паули, скорость вращения такого волчка будет сверхсветовой.

[7]«Одно время казалось, что техника жонглирования бесконечностями достигает уровня рациональной дисциплины (так называемая перенормировочная техника), но в дальнейшем возникшие новые трудности охладили симпатии к этой беспрецедентно искусственной рецептуре обращения с математическим аппаратом теории» [10, с. 427].

эффект тоже бесконечен для точечного электрона... Очевидно, что современная ситуация далеко не удовлетворительна, так как совместить квантовую теорию с теорией относительности не удалось» [6, с. 78]. Чтобы сохранить теорию, в которой совершаются осмысленные математические действия, Дирак готов пожертвовать релятивистской инвариантностью: «Неудачным результатом обрезания будет, конечно, релятивистская неинвариантность теории, ибо если производится какое-либо обрезание, т. е. считается, что частота ν не должна превышать некоторого значения, то тем самым вносится нерелятивистское условие, а значит, нарушается релятивистская инвариантность теории. Следовательно, квантовую электродинамику можно уложить в рамки разумной математической теории, но лишь ценой нарушения релятивистской инвариантности. Мне, однако, это кажется меньшим злом, чем отступление от стандартных правил математики и пренебрежение бесконечными величинами» [6, с. 78]. Здесь налицо логический тупик, являющийся результатом попытки объединения СТО и КМ на базе корпускулярной картины и парадигмы близкодействия (теории континуума). Баез в статье [11], подводя итог обзору о «мучениях с континуумом», в заключении пишет: «Мы видели, что в каждой значительной физической теории, бросающие вызов математические вопросы возникают из предположения, что пространство-время является континуумом. Континуум угрожает нам бесконечностями. Угрожают ли эти бесконечности нашей способности извлекать предсказания из этих теорий, или же они угрожают нашей способности формулировать эти теории точным образом? Мы можем ответить на эти вопросы, но только после тяжёлой работы. Является ли это знаком, что мы находимся на неверном пути? Является ли континуум, как мы его понимаем, только приближением к некоторой более грубой модели пространства-времени? Только время скажет». В 1955 г. Эйнштейн в своей последней статье писал: «Можно убедительно доказать, что реальность вообще не может быть представлена непрерывным полем. Из квантовых явлений, по-видимому, следует, что конечная система с конечной энергией может полностью описываться конечным набором чисел (квантовых чисел). Это, кажется, нельзя совместить с теорией континуума и требует для описания реальности чисто алгебраической теории. Однако сейчас никто не знает, как найти основу для такой теории» [12, с. 873].

К логическому тупику приводит теория, основанная на неверных предпосылках. В рассматриваемом случае такой предпосылкой является корпускулярная картина[8]. Уже в ранних экспериментах (интерференция электронов на двух

[8]«Мы ведём себя так, словно электрически заряженная частица — ровно настолько же вещь, как электрически заряженная капелька масла или круглая косточка бузины, применявшиеся в старых измерительных приборах. Мы без всякой оглядки применяем понятия классической физики так, словно вообще не слыхали об ограниченности её понятий и о принципе неопределённости. Не может ли это привести к ошибкам?» [5, с. 250-251]. М.А. Марков отмечал, что «...понятия обладают, так сказать, известной агрессивностью: они часто претендуют на области, где, по существу, применимость их лишена смысла, т. е. часто наше сознание по привычке, без достаточного основания, расширяет область применимости того или иного понятия и лишь после, иногда долгое время спустя, именно здесь обнаруживаются источники многих недоразумений» [13, с. 17].

щелях) было показано, что квантовые микрообъекты (электроны) не являются классическими частицами[9]. Электрон как частица (безразлично, шарик или точка) — это фикция, существующая только в человеческом сознании и нигде больше[10]. «Частица» («щелчок» детектора, «пятно» на фотографии) — это способ, которым реализуется то или иное состояние некоего «единого поля», о котором писал Гейзенберг: «Когда две элементарные частицы сталкиваются при очень высокой энергии, то в результате столкновения может возникнуть частица любого другого типа, а иногда один акт столкновения порождает много различных частиц. Это хорошо установленный экспериментальнй факт, по-видимому, свидетельствует о том, что будущей теории элементарных частиц придётся принять за исходное некое единое поле, называемое просто «веществом» или «энергией», а не частицы какого-нибудь специального типа. Для этого единого поля можно указать некоторые коммутационные соотношения и полевые уравнения, приводящие к существованию непрерывных и дискретных собственных значений. Дискретные собственные значения описывают «частицы», которые в зависимости от принятого соглашения можно назвать элементарными или составными, не проводя строгого различия между определениями тех и других» [18, с. 373]. При этом существуют *дискретные стационарные состояния* (электрон, протон, фотон, нейтрино) спектра материи (вещества, энергии) и *дискретные нестационарные* (распадающиеся) *состояния* (все остальные «частицы»[11]).

[9] А также они не являются и классическими волнами. Гейзенберг в статье «Язык и реальность в современной физике» отмечает, что «в зависимости от характера конкретного эксперимента определяется, целесообразно ли в данном случае говорить о волне или о частице, о траекториях электрона или о стационарных состояниях. При этом, однако, мы всегда ясно сознаем, что подобные образы — лишь неточные аналогии, что мы имеем дело всего лишь с условными событиями и пытаемся с их помощью приблизиться к реальному событию» [14, с. 217–218].

[10] Наряду с шариком и точкой для электрона бытует ещё один наглядный пространственный образ в виде электронного облака на атомной орбитали. Очевидно, что и этот образ также является фикцией, поскольку атомная орбиталь — это рудимент боровских орбит, от которых с появлением квантовой механики пришлось отказаться: «...представление об электронной орбите, связанное с идеей дискретного стационарного состояния, было по ходу дела практически отброшено. Понятие дискретных стационарных состояний, однако, осталось жить. Понятие это было необходимо. Оно имело свою основу в данных наблюдений. Наоборот, электронную орбиту не удалось согласовать с наблюдениями, поэтому от неё отказались, и от неё остались только матрицы для координат» [14, с. 97]. Таким образом, атомная орбиталь (боровская орбита) означает энергетический уровень (дискретное стационарное состояние), а электрон как облако на этой орбитали — это привнесённая человеческим воображением фантазия. В связи с этим уместно вспомнить о проблеме «критических» элементов модели Бора. Решение Фейнмана, представляющее атомное ядро в виде точки, приводит к парадоксу Клейна для элемента **Uts** (Унтрисептий) с атомным номером $Z = 137$. Другой пространственный образ, используемый в решении Грейнера–Рейнхардта, представляет атомное ядро в виде заряженного шара радиусом $R = 1,2A^{1/3}$ фм, где A — атомная масса, что приводит к потере электронейтральности для атомов выше элемента **Ust** (Унсепттрий) с атомным номером $Z = 173$ (более подробно см. [15–17]).

[11] Интересно отметить, что среди «фундаментальных частиц» стандартной модели есть векторные бозоны $W^{\pm}$, Z^0 и скалярный бозон H (бозон Хиггса), которые распадаются по многочисленным каналам, что, по всей видимости, никоим образом не умаляет «фундаментальности»

Настоящая статья является продолжением работы [19], в которой развивается алгебраическая формулировка квантовой теории с двоичной структурой (бинарные альтернативы, Ur-гипотеза фон Вайцзеккера [20, 21]). Следуя Гейзенбергу, основной наблюдаемой на фундаментальном уровне (микроуровне) считается энергия, которой соответствует эрмитов оператор H. C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ наблюдаемых состоит из оператора энергии H и присоединённых к H генераторов группы $\mathrm{SU}(2,2)$ (двулистной накрывающей конформной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$), образующих с H общую систему собственных функций. Спектр состояний (спектр материи) генерируется посредством конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала. Чистые сепарабельные состояния спектра материи задаются циклическими векторами $\mathbb{K}$-гильбертова пространства, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (вещественные числа $\mathbb{R}$, комплексные числа $\mathbb{C}$ и кватернионы $\mathbb{H}$). В соответствии со спектром масс [22] чистые сепарабельные состояния ω образуют физическое $\mathbb{K}$-гильбертово пространство $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$, где каждый циклический вектор $|\psi\rangle \in \mathbf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$ соответствует определённому наблюдаемому состоянию («частице»). В п. 2 строится пространство Фока, являющееся конструкцией над $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$. В п. 3 вводятся когерентные подпространства $\mathbf{H}^{(b,\ell)}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$ физического $\mathbb{K}$-гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$, где b и ℓ — барионное и лептонное числа. В п. 4 определяется S-матрица и рассматривается простейший процесс с участием четырёх состояний. На всех этапах построения S-матрицы (пространство Фока, когерентные подпространства) нигде не понадобилось понятие «частица», что лишний раз подчеркивает, что это понятие, привнесённое из макрофизики в микрофизику, является на микроуровне абсолютно чуждым (метафизическим) представлением.

2. Пространство Фока

Как известно, гильбертовы пространства любых объектов могут быть представлены подпространством пространства тензорного произведения двумерных гильбертовых пространств:

$$\mathsf{H}_m \subseteq \mathbf{T}_n = \bigotimes_n \mathbf{H}_2, \quad m \leqslant 2^n.$$

Согласно теореме 3 (п. 4 в [19]), фундаментальное циклическое представление $\pi \equiv \boldsymbol{\tau}_{1/2,0}$ $(\boldsymbol{\tau}_{0,1/2})$ алгебры наблюдаемых $\mathfrak{A}$ (оператора энергии H и присоединённых к H генераторов группы $\mathrm{SU}(2,2)$) определено в двумерном ГНС-гильбертовом пространстве H_2. Далее из теоремы 4 (п. 5 в [19]) следует, что фундаментальные циклические представления $\pi_{\mathbb{K}}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, в свою очередь, определены в двумерных $\mathbb{K}$-гильбертовых пространствах $\mathbf{H}_2(\mathbb{K})$. Фундаментальные чистые сепарабельные состояния C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ наблюдаемых задаются циклическими векторами $|\psi\rangle$ пространств $\mathbf{H}_2(\mathbb{K})$. С векторами $|\psi\rangle$ представлений $\pi_{\mathbb{K}}$ ассоциированы двумерные спинпространства $\mathbb{S}_2(\mathbb{K})$, являющиеся

этих «частиц».

минимальными левыми идеалами алгебр

$$\begin{array}{lcll}
C\!\ell_{0,2} & \simeq & \mathbb{H}, & p-q\equiv 6 \pmod 8 \ - \text{ алгебра кватернионов;}\\
C\!\ell_{2,0} & \simeq & \mathbb{R}(2), & p-q\equiv 2 \pmod 8 \ - \text{ алгебра антикватернионов;}\\
C\!\ell_{1,1} & \simeq & \mathbb{R}(2), & p-q\equiv 0 \pmod 8 \ - \text{ алгебра псевдокватернионов}
\end{array}$$

для случая числового поля $\mathbb{F}=\mathbb{R}$[12]. В случае $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ приходим к алгебре бикватернионов $\mathbb{C}_2$, являющейся комплексификацией алгебр $C\!\ell_{0,2}$, $C\!\ell_{2,0}$ и $C\!\ell_{1,1}$[13]:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{C}_2 & \simeq & \mathbb{C}\otimes C\!\ell_{0,2},\\
 & \simeq & \mathbb{C}\otimes C\!\ell_{2,0},\\
 & \simeq & \mathbb{C}\otimes C\!\ell_{1,1}.
\end{array}$$

Кроме того, существует изоморфизм[14] $\mathbb{C}_2\simeq C\!\ell_{3,0}$.

В полном физическом $\mathbb{K}$-гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ циклические векторы с различной тензорной размерностью образуют взаимно ортогональные подпространства. Прямая сумма

$$\bigoplus_{m=0}^{\infty}[\mathbf{H}_2(\mathbb{K})]^{\otimes m} \tag{1}$$

является тензорной алгеброй над пространством $\mathbf{H}_2(\mathbb{K})$. Это есть гильбертово пространство, элементами (векторами) которого служат произвольные последовательности $\Phi\equiv\{\Phi_m\}_{m=0}^{\infty}$ такие, что $\Phi_m\in[\mathbf{H}_2(\mathbb{K})]^{\otimes m}$ и

$$\|\Phi\|^2\equiv\sum_m\|\Phi_m\| \ < \ \infty, \tag{2}$$

а скалярное произведение имеет вид

$$\langle\Phi\mid\Psi\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}\langle\Phi_m\mid\Psi_m\rangle. \tag{3}$$

---

[12] Здесь мы используем терминологию Розенфельда [23]. В [23] показано, что существует широкое множество различных геометрий над тремя ассоциативными алгебрами с делением: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$.

[13] Двумерные алгебры $C\!\ell_{0,2}$, $C\!\ell_{2,0}$ и $C\!\ell_{1,1}$ являются простейшими «строительными блоками» двоичной структуры, поскольку одномерные алгебры $C\!\ell_{0,1}$ и $C\!\ell_{1,0}$ изоморфны числовым полям. Так, алгебра $C\!\ell_{0,1}$ имеет тип $p-q\equiv 7 \pmod 8$, следовательно, $C\!\ell_{0,1}\simeq C\!\ell_{0,0}\oplus\omega C\!\ell_{0,0}$, где $C\!\ell_{0,0}\simeq\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, а элемент $\omega=\mathbf{e}_1$ в силу $\omega^2=-1$ принадлежит к центру $\mathbf{Z}_{0,1}$ алгебры $C\!\ell_{0,1}$. Таким образом, $C\!\ell_{0,1}\simeq\mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}=\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Аналогично для алгебры $C\!\ell_{1,0}$, имеющей тип $p-q\equiv 1 \pmod 8$, справедлив изоморфизм $C\!\ell_{1,0}\simeq C\!\ell_{0,0}\oplus\omega C\!\ell_{0,0}\simeq\mathbb{R}\oplus e\mathbb{R}={}^2\mathbb{R}$ — поле *двойных чисел*, $\omega\equiv e$, e — двойная единица, $e^2=1$.

[14] Структура данного изоморфизма определяется следующим образом: максимальный базисный элемент $\omega=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ алгебры $C\!\ell_{3,0}$ коммутирует со всеми базисными элементами этой алгебры, следовательно, ω принадлежит центру $\mathbf{Z}_{3,0}=\{1,\omega\}$ алгебры $C\!\ell_{3,0}$. Поскольку $\omega^2=-1$, то $\mathbf{Z}_{3,0}$ изоморфен полю комплексных чисел, $\mathbf{Z}_{3,0}=\{1,i\}\simeq\mathbb{C}$, откуда следует изоморфизм $C\!\ell_{3,0}\simeq\mathbb{C}_2$.

Пусть $\mathfrak{H}_m = [\mathbf{H}_2(\mathbb{K})]^{\otimes m}$, тогда $\mathfrak{H}_m$ можно отождествить с m-мерным подпространством в прямой сумме (1), состоящим из тех векторов Φ, у которых $\Phi_l = 0$ при $l \neq m$. В частности, одномерное подпространство $\mathfrak{H}_0 = [\mathbf{H}_2(\mathbb{K})]^{\otimes 0}$ можно назвать *вакуумным*, оно натянуто на вектор $\Psi_0 \equiv |0\rangle$ с компонентами

$$(\Psi_0)_0 = 1, \quad (\Psi_0)_m = 0 \quad \text{при } m \neq 0,$$

который будем назвать ***вакуумным вектором***[15].

Далее, прямая сумма

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_m^{\otimes n} \tag{4}$$

является тензорной алгеброй над пространством $\mathfrak{H}_m$. Сумма (4) есть гильбертово пространство, векторами которого служат произвольные последовательности $\Phi \equiv \{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющие условиям аналогичным (2) и (3).

Пусть π — произвольная перестановка индексов $1, 2, \ldots, n$ в компонентах $\Phi_n \in \mathfrak{H}_m^{\otimes n}$ последовательности Φ, такая, что

$$\Phi_n^{\pi} = \Phi_n \quad \text{для всех } \pi \tag{5}$$

или

$$\Phi_n^{\pi} = \varepsilon(\pi)\Phi_n \quad \text{для всех } \pi. \tag{6}$$

Векторы, удовлетворяющие условию (5) (соответственно (6)), выделяют в $\mathfrak{H}_m^{\otimes n}$ подпространство, которое будем называть n-й *симметричной* (соответственно *антисимметричной*) *тензорной степенью* гильбертова пространства $\mathfrak{H}_m$. Введем обозначение $\mathfrak{H}_m^{\vee n}$ (соответственно $\mathfrak{H}_m^{\wedge n}$). Ортогональные проекторы в $\mathfrak{H}_m^{\otimes n}$ на подпространства $\mathfrak{H}_m^{\vee n}$ и $\mathfrak{H}_m^{\wedge n}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Sym}\Phi_n &= \frac{1}{n!}\sum_{\pi}\Phi_n^{\pi}, \\ \operatorname{Antisym}\Phi_n &= \frac{1}{n!}\sum_{\pi}\varepsilon(\pi)\Phi_n^{\pi}, \end{aligned}$$

здесь суммирование производится по всем перестановкам π индексов $1, 2, \ldots, n$. Легко видеть, что при $n = 1$ все пространства $\mathfrak{H}_m^{\otimes n}$, $\mathfrak{H}_m^{\vee n}$, $\mathfrak{H}_m^{\wedge n}$ совпадают с $\mathfrak{H}_m$, а при $n = 0$ все они совпадают с числовым полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (или $\mathbb{F} = \mathbb{R}$).

Векторы Φ из прямой суммы (4), у которых каждая проекция Φ_n удовлетворяет условию (5) и, значит, принадлежит $\mathfrak{H}_m^{\vee n}$, образуют гильбертово пространство

$$\mathbf{F}_{\vee}(\mathfrak{H}_m) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_m^{\vee n}, \tag{7}$$

[15]Подпространству $\mathfrak{H}_0 = [\mathbf{H}_2(\mathbb{K})]^{\otimes 0}$ соответствует циклический вектор $|\psi_0\rangle = \boldsymbol{\tau}_{0,0}\,|\omega\rangle$, где $\boldsymbol{\tau}_{0,0}$ — единичное представление группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1,3)$ (см. конус представлений на рис. 1 в [19]). Вакуумный вектор соответствует стационарному состоянию спектра материи с наинизшей энергией.

которое является симметричной тензорной алгеброй или ***пространством Фока бозе-состояний*** над пространством $\mathfrak{H}_m$. Аналогично, если условие (5) заменить на (6), то мы приходим к гильбертову пространству

$$\mathbf{F}_{\bigwedge}(\mathfrak{H}_m) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_m^{\bigwedge n}, \tag{8}$$

которое является внешней алгеброй или ***пространством Фока ферми-состояний*** над пространством $\mathfrak{H}_m$.

Для любого вектора Φ из прямой суммы (4) мы можем рассматривать Φ_n как проекцию Φ на $\mathfrak{H}_m^{\otimes n}$. Вектор Φ является *финитным*, если он имеет только конечное число отличных от нуля проекций Φ_n. Очевидно, финитные векторы образуют линейное многообразие, плотное в прямой сумме (4), при этом на финитных векторах определена (дистрибутивная, ассоциативная, но не коммутативная) операция тензорного произведения $\Phi \otimes \Psi$. Следовательно, на финитных векторах $\Phi, \Psi \in \mathbf{F}_{\bigvee}(\mathfrak{H}_m)$ определено симметричное тензорное произведение (дистрибутивное, ассоциативное и коммутативное)

$$\Phi{\textstyle\bigvee}\Psi = \mathrm{Sym}\, \Phi \otimes \Psi, \tag{9}$$

а на финитных векторах $\Phi, \Psi \in \mathbf{F}_{\bigwedge}(\mathfrak{H}_m)$ определено внешнее произведение (дистрибутивное и ассоциативное)

$$\Phi{\textstyle\bigwedge}\Psi = \mathrm{Antisym}\, \Phi \otimes \Psi. \tag{10}$$

При этом

$$\begin{aligned} \Phi{\textstyle\bigvee}\Psi &= \Psi{\textstyle\bigvee}\Phi, \\ \Phi_k{\textstyle\bigwedge}\Psi_l &= (-1)^{kl}\Psi_l{\textstyle\bigwedge}\Phi_k. \end{aligned} \tag{11}$$

Пространства $\mathfrak{H}_m^{\bigvee n}$ и $\mathfrak{H}_m^{\bigwedge n}$, являющиеся слагаемыми в прямых суммах (7) и (8), естественно рассматривать как собственные подпространства (существенно самосопряжённого) оператора числа состояний N, определённого на финитных векторах по формуле

$$(N\Phi)_n = n\Phi_n.$$

Если вектор Φ в (9) или (10) считать фиксированным вектором одного состояния, то отображение $\Psi \to \sqrt{N}\Phi{\textstyle\bigvee}\Psi$ или $\Psi \to \sqrt{N}\Phi{\textstyle\bigwedge}\Psi$ является линейным отображением на финитных векторах Ψ пространства Фока бозе- или ферми-состояний. Этот оператор обладает тем свойством, что вектор n состояний переходит в вектор $n+1$ состояния, поэтому мы будем называть его ***оператором рождения состояния*** и обозначать через $a^*(\Phi)$. Таким образом, для бозе- и ферми-состояний оператор рождения определяется формулами

$$\begin{aligned} a^*(\Phi)\Psi &= \sqrt{N}\Phi{\textstyle\bigvee}\Psi, \\ a^*(\Phi)\Psi &= \sqrt{N}\Phi{\textstyle\bigwedge}\Psi. \end{aligned}$$

Действие оператора $a^*(\Phi)$ на вакуумный вектор $|0\rangle$ приводит к следующим тождествам:

$$\begin{array}{rcl} a^*(\Phi_1)\ldots a^*(\Phi_n)\,|0\rangle & = & \sqrt{n!}\Phi_1\vee\ldots\vee\Phi_n, \\ a^*(\Phi_1)\ldots a^*(\Phi_n)\,|0\rangle & = & \sqrt{n!}\Phi_1\wedge\ldots\wedge\Phi_n. \end{array}$$

Таким образом, полиномы от операторов рождения при действии на вакуумный вектор $|0\rangle$ порождают множество векторов, плотное в пространстве Фока.

Далее сопряжённый оператор $(a^*(\Phi))^* \equiv a(\Phi)$ также может быть определён на всех финитных векторах пространства Фока. Он переводит вектор n состояний в вектор $n-1$ состояния, поэтому мы будем называть его ***оператором уничтожения состояния***. Действие оператора $a(\Phi)$ на бозе- и ферми-состояния определяется формулами

$$a(\Phi)\,(\Psi_1\vee\ldots\vee\Psi_{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{j=1}^{n+1}\langle\Phi\mid\Psi_j\rangle\Psi_1\vee\ldots\tilde{\Psi}_j\ldots\vee\Psi_{n+1},$$

$$a(\Phi)\,(\Psi_1\wedge\ldots\wedge\Psi_{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}\langle\Phi\mid\Psi_j\rangle\Psi_1\wedge\ldots\tilde{\Psi}_j\ldots\wedge\Psi_{n+1}.$$

Оператор $a(\Phi)$, действуя на вакуумный вектор $|0\rangle$, даёт нуль.

Операторы рождения и уничтожения состояний удовлетворяют следующим алгебраическим соотношениям:

$$a^*(\Phi) = (a(\Phi))^*, \tag{12}$$

$$[a(\Phi), a(\Phi')]_{\mp} = 0 = [a^*(\Phi), a^*(\Phi')]_{\mp}\,, \tag{13}$$

$$[a(\Phi), a^*(\Phi')]_{\mp} = \langle\Phi\mid\Phi'\rangle\cdot\mathbf{1}, \tag{14}$$

$$a(\Phi)\,|0\rangle = 0, \tag{15}$$

$$a^*(\Phi)\,|0\rangle = \Phi. \tag{16}$$

Выражение $[A,B]_- \equiv [A,B] \equiv AB-BA$ означает коммутатор двух операторов A и B, в то время как $[A,B]_+ \equiv AB+BA$ служит для обозначения антикоммутатора. Для бозе-состояний в формулах (13) и (14) подразумеваются коммутаторы, а для ферми-состояний — антикоммутаторы.

В приведённых выше формулах учитывается только один тип состояний. В более реалистической ситуации имеется конечное или счётное множество различных типов состояний ω (чистых сепарабельных состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ наблюдаемых). Для полной характеристики состояния ω необходимо задать массу m_ω, спин s_ω и заряд q_ω состояния. Масса (уровень энергии) определяется формулой [22, 24, 25][16]

$$m_\omega = m_e\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(\dot{l}+\frac{1}{2}\right), \tag{17}$$

[16] В 1952 г. Намбу [26] первым обратил внимание на существование эмпирических («бальмероподобных») зависимостей в спектре масс элементарных частиц, подчиняющихся следующей формуле: $m_N = (N/2)\,137\cdot m_e$, где N — положительное целое число, m_e — масса электрона.

где m_e — масса электронного состояния, $s_\omega = |l - \dot{l}|$ — спин состояния. Заряд q_ω состояния ω определяется в рамках $\mathbb{K}$-линейной структуры физического $\mathbb{K}$-гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ (см. теорему 4 в [19]): заряженные состояния ω^c (сектор $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{C})$), нейтральные состояния ω^h (сектор $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{H})$) и истинно нейтральные состояния ω^r (сектор $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{R})$). Далее на множестве $\{\omega\}$ типов состояний определена операция зарядового сопряжения[17] $\omega \to \overline{\omega}$ такая, что $\overline{\overline{\omega}} = \omega$, $m_{\overline{\omega}} = m_\omega$, $s_{\overline{\omega}} = s_\omega$, при этом $\overline{\omega}$ является *антисостоянием* состояния ω. Случай $\overline{\omega} = \omega$ соответствует истинно нейтральным состояниям (сектор $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{R})$).

Перейдём к построению пространства Фока с произвольным числом состояний любого типа, подчиняющихся квантовой статистике. Предположим, что среди суперотборных квантовых чисел (см. далее п. 4) имеется *тип статистики*:

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_\omega = \begin{cases} + & \text{для бозе-состояний,} \\ - & \text{для ферми-состояний.} \end{cases}$$

Определим пространство $\mathfrak{H}^B$ бозе-состояний и пространство $\mathfrak{H}^F$ ферми-состояний как прямые суммы пространств $\mathfrak{H}^{[\omega]}$, взятые по всем типам ω бозе- и ферми-состояний соответственно:

$$\mathfrak{H}^B = \bigoplus_{\varepsilon_\omega = +} \mathfrak{H}^{[\omega]}, \quad \mathfrak{H}^F = \bigoplus_{\varepsilon_\omega = -} \mathfrak{H}^{[\omega]}.$$

Очевидно, что в первой сумме $\mathfrak{H}^{[\omega]} \equiv \mathfrak{H}_m = \mathfrak{H}_{2k} = [\mathbf{H}_2(\mathbb{K})]^{\otimes 2k}$, а во второй сумме — $\mathfrak{H}^{[\omega]} \equiv \mathfrak{H}_m = \mathfrak{H}_{2k+1} = [\mathbf{H}_2(\mathbb{K})]^{\otimes 2k+1}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Пространство Фока с нефиксированным числом состояний произвольного типа имеет вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Phi}^B \otimes \mathbf{\Phi}^F, \tag{18}$$

В дальнейшем эмпирические зависимости подобного вида изучались многими авторами (см. [27–33]). Формула Намбу также может быть записана через постоянную тонкой структуры: $m_N = \frac{N}{2\alpha} m_e$, что приводит к так называемому *α-квантованию масс* элементарных частиц (см. [27, 32]). Далее в 2003 г. Сидхарт [34] предложил следующую эмпирическую формулу: $\text{mass} = 137 \cdot m\,(n + 1/2)$, где m и n — положительные целые числа. Формула Сидхарта описывает весь спектр масс элементарных частиц (известный к 2003 г.) с точностью до 3 %. Намбу и его последователи, ограничившись эмпирическими формулами, не предложили теоретического обоснования найденной зависимости. В [22] дано теоретико-групповое обоснование этого феномена с использованием формулы (17), ранее введённой в [24], где данная эмпирическая зависимость описывается в рамках циклических («зацепляющихся» по терминологии Гельфанда [36]) представлений $\boldsymbol{\tau}_{l\dot{l}}$ группы Лоренца. В [22] показано, что массы «элементарных частиц» кратны массе электрона с точностью до 0,41 %. Здесь имеет место прямая аналогия с электрическим зарядом. Как известно, любой электрический заряд кратен заряду электрона, причём кратен абсолютно точно. Если любой электрический заряд абсолютно кратен (квантован) заряду электрона, то в случае масс эта кратность (квантованность) имеет место с точностью 0,41 % (в среднем), где роль «кванта массы» играет масса электрона.

[17] В алгебраическом подходе операция зарядового сопряжения задаётся псевдоавтоморфизмом $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_n$, где $\mathcal{A}$ — произвольный элемент алгебры $\mathbb{C}_n$ (см. [37–43]).

где $\mathbf{\Phi}^B = \mathsf{F}_{\bigvee}(\mathfrak{H}^B)$ и $\mathbf{\Phi}^F = \mathsf{F}_{\bigwedge}(\mathfrak{H}^F)$ — прямые суммы симметричных и антисимметричных тензорных степеней соответствующих пространств:

$$\mathbf{\Phi}^B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}_n^B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\mathfrak{H}^B\right)^{\bigvee n},$$

$$\mathbf{\Phi}^F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}_n^F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\mathfrak{H}^F\right)^{\bigwedge n}.$$

Вакуумный вектор имеет вид

$$|0\rangle = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \in \mathbf{\Phi}_0^B \otimes \mathbf{\Phi}_0^F \subset \mathsf{F}.$$

В соответствии с общей схемой вторичного квантования сопоставим каждому типу состояний ω и каждому вектору $\Phi \in \mathfrak{H}^{[\omega]}$ пару операторов рождения и уничтожения $a_\omega^*(\Phi)$, $a_\omega(\Phi)$, определённых на всех векторах с конечным числом состояний. При этом выполняются соотношения

$$a_\omega^*(\Phi) = (a_\omega(\Phi))^*,$$

$$[a_\omega(\Phi), a_{\omega'}(\Phi')]_{\mp} = 0 = [a_\omega^*(\Phi), a_{\omega'}^*(\Phi')]_{\mp},$$
$$[a_\omega(\Phi), a_{\omega'}^*(\Phi')]_{\mp} = \langle \Phi \mid \Phi' \rangle \delta_{\omega\omega'},$$
$$a_\omega(\Phi)\,|0\rangle = 0,$$
$$a_\omega^*(\Phi)\,|0\rangle = \Phi.$$

3. Когерентные подпространства

В предыдущем параграфе мы определили пространство Фока F, являющееся конструкцией над $\mathbb{K}$-гильбертовым пространством $\mathsf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$. Для дальнейшего продвижения (определения S-матрицы) необходимо продолжить исследование структуры физического $\mathbb{K}$-гильбертова пространства $\mathsf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$.

Пусть $|\psi\rangle$ — циклический вектор пространства $\mathsf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$ (согласно теореме 3 в [19] вектор $|\psi\rangle$ задаёт чистое сепарабельное состояние ω C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ наблюдаемых). Тогда $\mathbf{\Psi} = e^{i\alpha}\,|\psi\rangle$, где α пробегает все вещественные числа и $\sqrt{\langle\psi\,|\psi\rangle} = 1$, будем называть *единичным лучом*. Следовательно, единичный луч $\mathbf{\Psi}$ — это совокупность базисных циклических векторов $\{\lambda\,|\psi\rangle\}$, $\lambda = e^{i\alpha}$, $|\psi\rangle \in \mathsf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$. Величины, связанные с наблюдаемыми эффектами, являются абсолютными значениями полубилинейной формы $|\,\langle\psi_1\,|\psi_2\rangle\,|^2$, не зависящими от параметров λ, характеризующих луч. Таким образом, ***пространство лучей*** есть фактор-пространство $\hat{H} = \mathsf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})/S^1$, т. е. проективное пространство одномерных подпространств из $\mathsf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$. Все состояния единой квантовой системы U (спектра материи) описываются единичными лучами. Предположим, что основное соответствие между физическими состояниями и элементами пространства $\mathsf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$ включает *принцип суперпозиции* квантовой теории, т. е.

существует набор базисных состояний таких, что произвольные состояния могут быть построены из них при помощи линейных суперпозиций. Однако, как известно [44], не все единичные лучи являются физически реализуемыми. Существуют физические ограничения (***правила суперотбора***) на выполнение принципа суперпозиции. В 1952 г. Вигнер, Уайтман и Вик [44] показали, что существование правил суперотбора связано с измеримостью относительной фазы суперпозиции. Это означает, что чистое состояние не может быть реализовано в виде суперпозиции некоторых состояний, например, не существует чистого состояния (когерентной суперпозиции) из бозонного $|\Psi_b\rangle$ и фермионного $|\Psi_f\rangle$ состояний (правило суперотбора по спину). Однако если в $\mathsf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ определена матрица плотности ρ, то суперпозиция $|\Psi_b\rangle + |\Psi_f\rangle$ определяет смешанное состояние.

Теорема 1. *Физическое $\mathbb{K}$-гильбертово пространство $\mathsf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ допускает разложение в прямую сумму (ненулевых) когерентных подпространств*

$$\mathsf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\nu\in N}\mathsf{H}^{\nu}_{\rm phys}(\mathbb{K}).$$

При этом принцип суперпозиции имеет место в ограниченной форме, т.е. в пределах когерентных подпространств $\mathsf{H}^{\nu}_{\rm phys}(\mathbb{K})$. Ненулевая линейная комбинация циклических векторов чистых сепарабельных состояний есть циклический вектор чистого сепарабельного состояния при условии, что все исходные векторы лежат в одном и том же когерентном подпространстве $\mathsf{H}^{\nu}_{\rm phys}(\mathbb{K})$. Суперпозиция циклических векторов чистых сепарабельных состояний из различных когерентных подпространств определяет смешанное состояние.

Доказательство. Исходным пунктом доказательства является соответствие $\omega \leftrightarrow |\psi\rangle$ между чистыми сепарабельными состояниями операторной алгебры $\mathfrak{A}$ и циклическими векторами пространства $\mathsf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ (теоремы 3 и 4 в [19]). Пусть $PS(\mathfrak{A})$ — множество всех чистых состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ наблюдаемых и пусть $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathsf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$. Тогда, как известно [45], для произвольной C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ вероятность перехода между двумя чистыми состояниями $\omega_1, \omega_2 \in PS(\mathfrak{A})$ определяется формулой Робертса–Рёпшторфа

$$|\langle\psi_1 \mid \psi_2\rangle|^2 = \omega_1\cdot\omega_2 = 1 - 1/4\|\omega_1-\omega_2\|^2.$$

При этом $\omega_1\cdot\omega_2 = \omega_2\cdot\omega_1$ и $\omega_1\cdot\omega_2$ всегда заключено на отрезке $[0,1]$. Соответственно, $\omega_1\cdot\omega_2 = 1$ в точности тогда, когда $\omega_1=\omega_2$. Будем называть два чистых состояния ω_1 и ω_2 *ортогональными*, если вероятность перехода $\omega_1\cdot\omega_2$ равна нулю. Соответственно, два подмножества S_1 и S_2 в $PS(\mathfrak{A})$ являются взаимно ортогональными, если $\omega_1\cdot\omega_2=0$ для всех $\omega_1\in S_1$ и $\omega_2\in S_2$. Непустое подмножество $S\in PS(\mathfrak{A})$ называется *нераспадающимся*, если его нельзя разбить на два непустых ортогональных подмножества. Следуя [4], будем считать, что всякое максимальное нераспадающееся множество (т. е. нераспадающееся множество, не являющееся собственным подмножеством другого нераспадающегося множества чистых состояний из $PS(\mathfrak{A})$) является *сектором*. Итак,

$PS(\mathfrak{A})$ разбивается на секторы, следовательно, в $PS(\mathfrak{A})$ существует отношение эквивалентности $\omega_1 \sim \omega_2$ в точности тогда, когда существует нераспадающееся множество в $PS(\mathfrak{A})$, содержащее ω_1 и ω_2. Следовательно, $PS(\mathfrak{A})$ единственным образом разбивается на попарно непересекающиеся и взаимно ортогональные секторы, которые в точности совпадают с *классами эквивалентности* в $PS(\mathfrak{A})$. По сути сектор является алгебраическим двойником когерентного подпространства. Далее пусть некоторое множество циклических векторов в физическом $\mathbb{K}$-гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$, соответствующее чистым сепарабельным состояниям алгебры $\mathfrak{A}$ наблюдаемых (в нашем случае оператора энергии H и присоединённых к H генераторов группы $\mathrm{SU}(2,2)$), образует тотальное множество в $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$, т. е. такое множество X, замыкание линейной оболочки которого всюду плотно в $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$. Тогда X нельзя представить в виде объединения двух (или более) непустых взаимно ортогональных подмножеств. Будем говорить, что векторы $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle \in X$ связаны соотношением $|\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle$, если $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ принадлежат линейной оболочке из X. Легко видеть, что соотношение $|\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle$ индуцируется соотношением эквивалентности $\omega_1 \sim \omega_2$ из $PS(\mathfrak{A})$. Следовательно, отношение $|\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle$ есть отношение эквивалентности и классы эквивалентности в X образуют разбиение X на взаимно ортогональные системы X_ν, где $\{\nu\} = N$ — некоторое семейство индексов. Взяв теперь в качестве $\mathbf{H}^{\nu}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ замкнутую линейную оболочку множества X_ν, мы приходим к искомому разложению $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств $\mathbf{H}^{\nu}_{\rm phys}(\mathbb{K})$. Отсюда следует ограниченная форма принципа суперпозиции (а именно в пределах подпространств $\mathbf{H}^{\nu}_{\rm phys}(\mathbb{K})$). ■

Далее пусть в $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ определена (посредством центрального расширения) связная компактная n-параметрическая абелева группа $G = U(1)^n \equiv U(1) \times \ldots U(1)$ (*калибровочная группа*). Произвольный элемент этой группы представляется набором n фазовых множителей:

$$g(s_1, \ldots, s_n) \equiv (e^{i\alpha_1}, \ldots, e^{i\alpha_n}), \quad 0 \leqslant \alpha_j < 2\pi.$$

В пространстве $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ зададим точное унитарное представление U группы G. Соответствующие калибровочные преобразования в $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ имеют вид

$$U(g) = s_1^{Q_1} \ldots s_n^{Q_n} \equiv e^{i(\alpha_1 Q_1 + \ldots + \alpha_n Q_n)}.$$

Генераторы Q_1, …, Q_n калибровочных преобразований являются взаимно коммутирующими самосопряжёнными операторами с целочисленным спектром (они называются *зарядами*, соответствующими данной калибровочной группе). Тогда $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{q_1,\ldots,q_n \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}^{(q_1,\ldots,q_n)}_{\rm phys}(\mathbb{K}) \qquad (19)$$

соответствующих спектральных подпространств, состоящих из всех векторов $|\psi\rangle$ таких, что $(Q_j - q_j)\,|\psi\rangle = 0$, $j = 1, \ldots, n$. При этом произвольный ненулевой циклический вектор $|\psi\rangle \in \mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ определяет чистое сепарабельное состояние ω алгебры наблюдаемых в точности тогда, когда он является собственным вектором для всех зарядов. Таким образом в $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ задаются *стандартные правила суперотбора*, причём (19) есть разложение $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ в прямую сумму когерентных подпространств $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(q_1,\ldots,q_n)}(\mathbb{K})$. Согласно современному состоянию в физике высоких энергий правила суперотбора могут быть довольно полно описаны электрическим Q $(=Q_1)$, барионным B $(=Q_2)$ и лептонным L $(=Q_3)$ зарядами. Согласно теореме 4 в [19], электрический заряд учитывается $\mathbb{K}$-линейной структурой пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$. С целью описать весь спектр наблюдаемых состояний (уровней спектра материи) введём 2-параметрическую калибровочную группу $G=U(1)^2\equiv U(1)\times U(1)$ относительно барионного B и лептонного L зарядов. Тогда разложение $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ на когерентные подпространства имеет вид:

$$\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})=\bigoplus_{b,\ell\in\mathbb{Z}}\mathbf{H}_{\rm phys}^{(b,\ell)}(\mathbb{K}),\quad \mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}. \tag{20}$$

Разложение (20) позволяет охватить практически весь наблюдаемый спектр состояний (см. Particle Data Group [46]). Прежде всего спектр материи подразделяется на три сектора: лептонный, мезонный и барионный. Лептонный сектор включает в себя заряженные лептоны: электрон e^-, мюон μ^-, τ^--лептон (и их антисостояния). Все заряженные лептоны принадлежат когерентным подпространствам вида $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(0,\ell)}(\mathbb{C})$ (состояния) и $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(0,\ell)}(\overline{\mathbb{C}})$ (антисостояния). Нейтральные лептоны (три сорта нейтрино[18]) принадлежат когерентному подпространству $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(0,\ell)}(\mathbb{H})$ (для антинейтрино $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(0,\ell)}(\overline{\mathbb{H}})$). Лептонный сектор также включает одно истинно нейтральное состояние: фотон γ (подпространство $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(0,\ell)}(\mathbb{R})$). В отличие от лептонного сектора мезонный и барионный секторы (адронный сектор в совокупности) содержат широкое множество калейдоскопически превращающихся друг в друга состояний. Мезонный сектор разбивается относительно заряда на три множества когерентных подпространств. Во-первых, заряженные мезоны ($\pi^\pm$ (пионы), $K^\pm$ (каоны), $\rho^\pm$, $\ldots$) принадлежат когерентным подпространствам вида $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(0,0)}(\mathbb{C})$ (соответственно для антисостояний $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(0,0)}(\overline{\mathbb{C}})$) с целым спином (все мезоны имеют целый спин). Далее нейтральные мезоны (K^0, $\overset{*}{K}{}^0$, $\ldots$) образуют подпространства $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(0,0)}(\mathbb{H})$ (соотв., $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(0,0)}(\overline{\mathbb{H}})$) целого спина. В свою очередь истинно нейтральные мезоны (π^0, η, φ, ρ^0, $\ldots$) являются состояниями спектра материи, принадлежащими когерентному подпространству $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(0,0)}(\mathbb{R})$. Барионный сектор разбивается относительно заряда на два множества когерентных подпространств: заряженные барионы (p (протон), $\Sigma^\pm$, $\Xi^\pm$, $\ldots$) образуют подпространства вида $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(b,0)}(\mathbb{C})$ (соотв., $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(b,0)}(\overline{\mathbb{C}})$) с полуцелым спином (все барионы имеют полуцелый спин); нейтральные барионы (n (нейтрон), Σ^0, Ξ^0, $\ldots$) являются состояниями из когерентных подпространств вида $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(b,0)}(\mathbb{H})$ (соотв., $\mathbf{H}_{\rm phys}^{(b,0)}(\overline{\mathbb{H}})$) полуцелого спина. Истинно нейтральные барионы (майорановские фермионы) до сих пор не обнаружены в природе.

[18]Нейтринные осцилляции показывают, что лептонное число (аромат) для нейтрино не сохраняется, т. е. нейтрино с определённым ароматом не является состоянием с определённой массой, а представляет собой квантовую суперпозицию массивных нейтринных состояний.

4. S-матрица

Итак, в нашем распоряжении имеются все необходимые математические конструкции для определения S-матрицы: пространство Фока $\mathbf{F}$ и когерентные подпространства физического $\mathbb{K}$-гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$.

Пусть Ω^{in} и Ω^{out} — линейные изометрические вложения из $\mathbf{F}$ в $\mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$:

$$\Omega^{\text{in}}\mathbf{F} = \mathbf{H}^{\text{in}}_{\text{phys}}(\mathbb{K}) \subset \mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K}), \quad \Omega^{\text{out}}\mathbf{F} = \mathbf{H}^{\text{out}}_{\text{phys}}(\mathbb{K}) \subset \mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K}).$$

Тогда линейный оператор

$$S = \left(\Omega^{\text{out}}\right)^* \Omega^{\text{in}}$$

в пространстве Фока $\mathbf{F}$ называется ***матрицей рассеяния*** (или *оператором рассеяния*, или *S-матрицей*). Его норма не превосходит единицы. Из физических соображений следует потребовать ещё, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{H}^{\text{in}}_{\text{phys}}(\mathbb{K}) = \mathbf{H}^{\text{out}}_{\text{phys}}(\mathbb{K}),$$

которое эквивалентно условию унитарности S-матрицы, а также означает, что $\mathbf{H}^{\text{in}}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ и $\mathbf{H}^{\text{out}}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ являются когерентными подпространствами.

Изометрический оператор Ω^{in} отображает пространство Фока $\mathbf{F}$ (падающих состояний) в физическое $\mathbb{K}$-гильбертово пространство $\mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$. Этот оператор параметризует векторы физического $\mathbb{K}$-гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ векторами пространства Фока $\mathbf{F}$. Соответственно, изометрический оператор Ω^{out} параметризует векторы физического пространства векторами пространства Фока рассеянных состояний. Итак, в физическом $\mathbb{K}$-гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ имеем два отображения $\Omega^{\text{in}} : \mathbf{F} \to \mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ и $\Omega^{\text{out}} : \mathbf{F} \to \mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ и, значит, одному и тому же вектору Φ пространства Фока сопоставляются два различных состояния

$$\Phi^{\text{in}} = \Omega^{\text{in}}\Phi, \quad \Phi^{\text{out}} = \Omega^{\text{out}}\Phi.$$

Матричный элемент $\langle \Psi \mid S\Phi \rangle$ есть амплитуда $\left\langle \Psi^{\text{out}} \mid \Phi^{\text{in}} \right\rangle$ вероятности перехода $\left|\left\langle \Psi^{\text{out}} \mid \Phi^{\text{in}} \right\rangle\right|^2$ между двумя состояниями (с векторами Φ^{in} и Ψ^{out}), первое из которых проявляет себя как состояние системы падающих (налетающих) состояний с вектором $\Phi \in \mathbf{F}$, второе — как состояние системы рассеянных (вылетающих) состояний с вектором $\Psi \in \mathbf{F}$ (здесь мы предполагаем, что Φ^{in} и Ψ^{out} — циклические векторы сепарабельных состояний ω).

Пусть имеется какой-либо канал реакции

$$\omega_1 + \ldots + \omega_\nu \;\longrightarrow\; \omega_{\nu+1} + \ldots + \omega_n$$

с участием n состояний (с типами $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$ падающих и $\omega_{\nu+1}, \ldots, \omega_n$ рассеянных состояний). Тогда часть оператора рассеяния, соответствующую этому каналу, можно характеризовать матричными элементами $\langle \Psi \mid S\Phi \rangle$ между произвольными векторами вида

$$\begin{aligned} \Phi &= a^*_{\omega_\nu}(\Phi_\nu) \ldots a^*_{\omega_1}(\Phi_1)\, |0\rangle\,, \\ \Psi &= a^*_{\omega_{\nu+1}}(\Phi_{\nu+1}) \ldots a^*_{\omega_n}(\Phi_n)\, |0\rangle\,. \end{aligned}$$

Рассмотрим простейший процесс с участием четырёх состояний

$$\omega_1 + \omega_2 \longrightarrow \omega_3 + \omega_4. \tag{21}$$

Согласно теореме 3 в [19] чистое сепарабельное состояние ω алгебры $\mathfrak{A}$ наблюдаемых задаётся циклическим вектором физического $\mathbb{K}$-гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$:

$$|\psi\rangle = \pi_\omega(\mathfrak{h}^{(1)})\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(2)})\cdots\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(n)}\,|\omega\rangle \longmapsto \boldsymbol{\tau}_{l,\dot{l}}\,|\omega\rangle\,,$$

где $\pi \equiv \boldsymbol{\tau}_{l,\dot{l}}$ — циклическое представление алгебры $\mathfrak{A}$, соответствующее (при выбранном физическом представлении π) неприводимому конечномерному представлению $\boldsymbol{\tau}_{l,\dot{l}}$ группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$.

Следовательно, для состояний в левой части (21) имеем

$$\omega_1 \sim \boldsymbol{\tau}_{l_1,\dot{l}_1}\,|\omega\rangle\,,\quad \omega_2 \sim \boldsymbol{\tau}_{l_2,\dot{l}_2}\,|\omega\rangle\,.$$

При соударении (взаимодействии) состояний ω_1 и ω_2 образуется новое сепарабельное состояние

$$\omega_1 \otimes \omega_2 \sim \boldsymbol{\tau}_{l_1,\dot{l}_1} \otimes \boldsymbol{\tau}_{l_2,\dot{l}_2}\,|\omega\rangle \tag{22}$$

с вектором $\left|\Phi^{\rm in}\right\rangle \in \mathbf{H}^{\rm in}_{\rm phys}(\mathbb{K})$. В правой части (21) состояния ω_3 и ω_4 (продукты реакции) образуют сепарабельное состояние с вектором $|\Phi^{\rm out}\rangle \in \mathbf{H}^{\rm out}_{\rm phys}(\mathbb{K})$. Из условия унитарности S-матрицы (и в согласии с теоремой из предыдущего пункта) имеем

$$\mathbf{H}^{\rm in}_{\rm phys}(\mathbb{K}) = \mathbf{H}^{(b,\ell)}_{\rm phys}(\mathbb{K}) = \mathbf{H}^{\rm out}_{\rm phys}(\mathbb{K}),$$

т. е. $\mathbf{H}^{\rm in}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ и $\mathbf{H}^{\rm out}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ являются когерентными подпространствами, в которых сохраняется электрический заряд, а также сохраняются барионное и лептонное числа.

В правой части (22) стоит тензорное произведение двух неприводимых представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1,3) \simeq {\rm SL}(2,\mathbb{C})$, которое, в общем случае, разлагается в прямую сумму неприводимых представлений. Следовательно, для правой части (22) существует разложение Клебша–Гордана

$$\boldsymbol{\tau}_{l_1,\dot{l}_1} \otimes \boldsymbol{\tau}_{l_2,\dot{l}_2} = \bigoplus_{|l_1-l_2|\leqslant m\leqslant l_1+l_2}\ \bigoplus_{|\dot{l}_1-\dot{l}_2|\leqslant \dot{m}\leqslant \dot{l}_1+\dot{l}_2} \boldsymbol{\tau}_{m,\dot{m}}. \tag{23}$$

В силу разложения (23) сепарабельное состояние $\omega_1\otimes\omega_2$ является линейной выпуклой комбинацией чистых сепарабельных состояний, которые при выполнении условия унитарности S-матрицы (когерентности in- и out-подпространств) образуют линейную выпуклую комбинацию чистых сепарабельных состояний, соответствующих вектору $|\Phi^{\rm out}\rangle$.

Пример 1. Рассмотрим процесс

$$n + \pi^- \longrightarrow \Sigma^- + K^0,$$

где n — нейтрон, π^- — отрицательно заряженный пион, Σ^- — отрицательно заряженный сигма-гиперон, K^0 — нейтральный каон. Чистое сепарабельное состояние ω_n с циклическим представлением $\boldsymbol{\tau}_{\frac{85}{2},42}$ (см. таб. IV в [22]) принадлежит когерентному подпространству $\mathbf{H}^{(1,0)}_{\rm phys}(\mathbb{H})$. В свою очередь ω_{π^-} с представлением $\boldsymbol{\tau}_{16,16}$ (см. таб. I в [22]) принадлежит подпространству $\mathbf{H}^{(0,0)}_{\rm phys}(\mathbb{C})$. Следовательно, сепарабельное состояние $\omega_n \otimes \omega_{\pi^-}$, в силу соотношения $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ (см. формулы (7) в [19]), принадлежит когерентному подпространству $\mathbf{H}^{(1,0)}_{\rm phys}(\mathbb{C}) = \mathbf{H}^{\rm in}_{\rm phys}(\mathbb{C})$. Разложение Клебша–Гордана (23) для этого случая имеет вид

$$\boldsymbol{\tau}_{\frac{85}{2},42} \otimes \boldsymbol{\tau}_{16,16} = \bigoplus_{\frac{53}{2} \leqslant m \leqslant \frac{117}{2}} \bigoplus_{26 \leqslant \dot{m} \leqslant 58} \boldsymbol{\tau}_{m,\dot{m}} =$$

$$= \boldsymbol{\tau}_{\frac{53}{2},26} + \boldsymbol{\tau}_{27,26} + \ldots + \boxed{\boldsymbol{\tau}_{48,\frac{95}{2}}} + \ldots + \boxed{\boldsymbol{\tau}_{\frac{61}{2},\frac{61}{2}}} + \ldots + \boldsymbol{\tau}_{58,58} + \boldsymbol{\tau}_{\frac{117}{2},58}. \quad (24)$$

Представления, обведённые рамкой, соответствуют Σ^--гиперону ($\boldsymbol{\tau}_{48,\frac{95}{2}}$) и K^0-каону ($\boldsymbol{\tau}_{\frac{61}{2},\frac{61}{2}}$) (см. таб. I и IV в [22]). Все остальные представления в (24) соответствуют состояниям, находящимся вне когерентного подпространства $\mathbf{H}^{(1,0)}_{\rm phys}(\mathbb{C})$.

Литература

1. Heisenberg W. Die «beobachtbaren» Grössen in der Theorie der Elementarteilchen // Zs. Phys. 1943. V. 120. P. 513–538. Русский перевод: Гейзенберг В. Избранные труды. М. : Эдиториал УРСС, 2001. С. 312–372.
2. Wheeler J.A. On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure // Phys. Rev. 1937. V. 52. P. 1107–1122.
3. Чью Дж. Аналитическая теория S-матрицы. М. : Мир, 1968. 150 с.
4. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М. : Наука, 1987. 616 с.
5. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М. : Наука, 1990. 400 с.
6. Дирак П.А.М. Воспоминания о необычайной эпохе. М. : Наука, 1990. 208 с.
7. де Бройль Л. Избранные научные труды. Т. 3. Теория света на основе теории слияния. Частицы со спином. М. : Академия Медиаиндустрии, 2013. 524 с.
8. Abraham M. Prinzipien der Dynamik des Electrons // Phys. Z. 1902. V. 4. P. 57–62.
9. Uhlenbeck G.E., Goudsmit S. Spinning Electrons and the Structure of Spectra // Nature. 1926. V. 117. P. 264–265.
10. Марков М.А. Избранные труды: В 2 т. Т. 1. Квантовая теория поля, физика элементарных частиц, физика нейтрино, философские проблемы физики. М. : Наука, 2000. 505 с.
11. Baez J.C. Struggles with the Continuum // arXiv:1609.01421 [math-ph] (2016).
12. Эйнштейн А. Релятивистская теория несимметричного поля / Собрание научных трудов. Т. 2. Работы по теории относительности 1921–1955. М. : Наука, 1966. С. 849–873.
13. Марков М.А. О трёх интерпретациях квантовой механики. М. : Наука, 1991. 112 с.

14. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987. 368 с.
15. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2(46). С. 5–23.
16. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов II.: Таблица Сиборга // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1(49). С. 5–21.
17. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов III.: 10-периодическое расширение // Математические структуры и моделирование. 2019. № 3(51). С. 5–20.
18. Heisenberg W. On the mathematical frame of the theory of elementary particles // Comm. Pure and Applied Mathematics. 1951. V. 4. P. 15–22. Русский перевод: Гейзенберг В. Избранные труды. М. : Эдиториал УРСС, 2001. С. 373–380.
19. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика I.: Основные определения // Математические структуры и моделирование. 2020. № 2(54). С. 4–23.
20. Weizsäcker C.F.v. Komplementarität und Logik I // Naturwiss. 1955. V. 42. P. 521–529.
21. Görnitz Th., Graudenz D, Weizsäcker C.F.v. Quantum Field Theory of Binary Alternatives // Int. J. Theor. Phys. 1992. V. 31. P. 1929–1959.
22. Варламов В.В. Квантование массы и группа Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2017. № 2(42). С. 11–28.
23. Розенфельд Б.А., Замаховский М.П. Геометрия групп Ли. М. : МЦНМО, 2003. 560 с.
24. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries // Int. J. Theor. Phys. 2015. V. 54. P. 3533–3576.
25. Варламов В.В. Спинорная структура и SU(3)-симметрия // Математические структуры и моделирование. 2015. № 1(33). С. 18–33.
26. Numbu Y. An Empirical Mass Spectrum of Elementary Particles // Prog. Theor. Phys. 1952. V. 7. P. 595–596.
27. Mac Gregor M.H. Models for Particles // Lett. Nuovo Cim. 1970. V. 7. P. 211–214.
28. Barut A.O. Lepton mass formula // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 1251.
29. Palazzi P. The meson mass system // Int. J. Mod. Phys. A. 2007. V. 22. P. 546–549.
30. Shah G.N., Mir T.A. Pion and muon mass difference: a determining factor in elementary particle mass distribution // Mod. Phys. Lett. A. 2008. V. 23. P. 53.
31. Mir T.A., Shah G.N. Order in the mass spectrum of elementary particles // arXiv:0806.1130 [physics.gen-ph] (2008).
32. Greulich K.O. Calculation of the Masses of All Fundamental Elementary Particles with an Accuracy of Approx. 1% // J. Mod. Phys. 2010. V. 1. P. 300–302.
33. Chiatti L. A Possible Model for the Mass Spectrum of Elementary Particles // Phys. Essays. 2012. V. 25. P. 374–386.
34. Sidharth B.G. A Formula for the Mass Spectrum of Baryons and Mesons // arXiv:physics/030601 (2003).
35. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М. : Физматлит, 1958.
36. Рашевский П.К. Теория спиноров // УМН. 1955. Т. 10. С. 3–110.
37. Варламов В.В. Дискретные симметрии на пространствах фактор-представлений группы Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2001. Вып. 7.

C. 114–127.
38. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2004. V. 14. P. 81–168.
39. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // Phys. Lett. B. 2005. V. 631. P. 187–191.
40. Varlamov V.V. The CPT Group in the de Sitter Space // Annales de la Fondation Louis de Broglie. 2004. V. 29. P. 969–987.
41. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields // Int. J. Theor. Phys. 2012. V. 51. P. 1453–1481.
42. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2015. V. 25. P. 487–516.
43. Wick G.G., Wigner E.P., Wightman A.S. Intrinsic Parity of Elementary Particles // Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 101.
44. Roberts J.E., Roepstorff G. Some Basic Concepts of Algebraic Quantum Theory // Commun. Math. Phys. 1969. V. 11. P. 321–338.
45. Tanabashi M. *at al.* (Particle Data Group) // Phys. Rev. 2018. D. V. 40. 030001. URL: `http://pdg.lbl.gov`.

ALGEBRAIC QUANTUM MECHANICS: II. S-MATRIX

V.V. Varlamov
Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. The S-matrix is defined in the framework of an algebraic formulation of quantum theory with a binary structure.

Keywords: S-matrix, Fock space, coherent subspaces, separable states, physical Hilbert space, mass spectrum..

References

1. Heisenberg W. Die ¡¡beobachtbaren¿¿ Grössen in der Theorie der Elementarteilchen. Zs. Phys., 1943, vol. 120, ppP. 513–538.
2. Wheeler J.A. On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure. Phys. Rev., 1937, vol. 52, pp. 1107–1122.
3. Ch'yu Dzh. Analiticheskaya teoriya S-matritsy. Moscow, Mir Publ., 1968, 150 p. (in Russian)
4. Bogolyubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., and Todorov I.T. Obshchie printsipy kvantovoi teorii polya. Moscow, Nauka Publ., 1987, 616 p. (in Russian)
5. Geizenberg V. Fizika i filosofiya. Chast' i tseloe. Moscow, Nauka Publ., 1990, 400 p. (in Russian)
6. Dirak P.A.M. Vospominaniya o neobychainoi epokhe. Moscow, Nauka Publ., 1990, 208 p. (in Russian)

7. de Broil' L. Izbrannye nauchnye trudy. vol. 3. Teoriya sveta na osnove teorii sliyaniya. Chastitsy so spinom. Moscow, Akademiya Mediaindustrii Publ., 2013, 524 p. (in Russian)
8. Abraham M. Prinzipien der Dynamik des Electrons. Phys. Z., 1902, vol. 4, pp. 57–62.
9. Uhlenbeck G.E. and Goudsmit S. Spinning Electrons and the Structure of Spectra. Nature, 1926, vol. 117, pp. 264–265.
10. Markov M.A. Izbrannye trudy: V 2 t. vol. 1. Kvantovaya teoriya polya, fizika elementarnykh chastits, fizika neitrino, filosofskie problemy fiziki. Moscow, Nauka Publ., 2000, 505 p. (in Russian)
11. Baez J.C. Struggles with the Continuum. arXiv:1609.01421 [math-ph] (2016).
12. Einshtein A. Relyativistskaya teoriya nesimmetrichnogo polya. Sobranie nauchnykh trudov, vol. 2. Raboty po teorii otnositel'nosti 1921–1955. Moscow, Nauka Publ., 1966, pp. 849–873. (in Russian)
13. Markov M.A. O trekh interpretatsiyakh kvantovoi mekhaniki. Moscow, Nauka Publ., 1991, 112 p. (in Russian)
14. Geizenberg V. Shagi za gorizont. Moscow, Progress Publ., 1987, 368 p. (in Russian)
15. Varlamov V.V. Teoretiko-gruppovoe opisanie periodicheskoi sistemy elementov. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 2(46), pp. 5–23. (in Russian)
16. Varlamov V.V. Teoretiko-gruppovoe opisanie periodicheskoi sistemy elementov II.: Tablitsa Siborga. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2019, no. 1(49), pp. 5–21. (in Russian)
17. Varlamov V.V. Teoretiko-gruppovoe opisanie periodicheskoi sistemy elementov III.: 10-periodicheskoe rasshirenie. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2019, no. 3(51), pp. 5–20. (in Russian)
18. Heisenberg W. On the mathematical frame of the theory of elementary particles. Comm. Pure and Applied Mathematics, 1951, vol. 4, pp. 15–22.
19. Varlamov V.V. Algebraicheskaya kvantovaya mekhanika I.: Osnovnye opredeleniya. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 2(54), pp. 4–23. (in Russian)
20. Weizsäcker C.F.v. Komplementarität und Logik I. Naturwiss, 1955, vol. 42, pp. 521–529.
21. Görnitz Th., Graudenz D, and Weizsäcker C.F.v. Quantum Field Theory of Binary Alternatives. Int. J. Theor. Phys., 1992, vol. 31, pp. 1929–1959.
22. Varlamov V.V. Kvantovanie massy i gruppa Lorentsa. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 2(42), pp. 11–28. (in Russian)
23. Rozenfel'd B.A. and Zamakhovskii M.P. Geometriya grupp Li. Moscow, MTsNMO Publ., 2003, 560 p. (in Russian)
24. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries. Int. J. Theor. Phys., 2015, vol. 54, pp. 3533–3576.
25. Varlamov V.V. Spinornaya struktura i SU(3)-simmetriya. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2015, no. 1(33), pp. 18–33. (in Russian)
26. Numbu Y. An Empirical Mass Spectrum of Elementary Particles. Prog. Theor. Phys., 1952, vol. 7, pp. 595–596.
27. Mac Gregor M.H. Models for Particles. Lett. Nuovo Cim., 1970, vol. 7, pp. 211–214.
28. Barut A.O. Lepton mass formula. Phys. Rev. Lett., 1979, vol. 42, pp. 1251.
29. Palazzi P. The meson mass system. Int. J. Mod. Phys. A., 2007, vol. 22, pp. 546–549.
30. Shah G.N. and Mir T.A. Pion and muon mass difference: a determining factor in

elementary particle mass distribution. Mod. Phys. Lett. A., 2008, vol. 23, pp. 53.
31. Mir T.A. and Shah G.N. Order in the mass spectrum of elementary particles. arXiv:0806.1130 [physics.gen-ph] (2008).
32. Greulich K.O. Calculation of the Masses of All Fundamental Elementary Particles with an Accuracy of Approx. 1%. J. Mod. Phys., 2010, vol. 1, pp. 300–302.
33. Chiatti L. A Possible Model for the Mass Spectrum of Elementary Particles. Phys. Essays, 2012, vol. 25, pp. 374–386.
34. Sidharth B.G. A Formula for the Mass Spectrum of Baryons and Mesons. arXiv:physics/030601 (2003).
35. Sidharth B.G. A QCD Generated Mass Spectrum. arXiv:physics/0309037 (2003).
36. Gel'fand I.M., Minlos R.A., and Shapiro Z.Ya. Predstavleniya gruppy vrashchenii i gruppy Lorentsa, ikh primeneniya. Moscow, Fizmatlit Publ., 1958. (in Russian)
37. Rashevskii P.K. Teoriya spinorov. UMN, 1955, vol. 10, pp. 3–110. (in Russian)
38. Varlamov V.V. Diskretnye simmetrii na prostranstvakh faktor-predstavlenii gruppy Lorentsa. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2001, no. 7, pp. 114–127. (in Russian)
39. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups. Adv. Appl. Clifford Algebras, 2004, vol. 14, pp. 81–168.
40. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space. Phys. Lett. B., 2005, vol. 631, pp. 187–191.
41. Varlamov V.V. The CPT Group in the de Sitter Space. Annales de la Fondation Louis de Broglie, 2004, vol. 29, pp. 969–987.
42. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields. Int. J. Theor. Phys., 2012, vol. 51, pp. 1453–1481.
43. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces. Adv. Appl. Clifford Algebras, 2015, vol. 25, pp. 487–516.
44. Wick G.G., Wigner E.P., and Wightman A.S. Intrinsic Parity of Elementary Particles. Phys. Rev., 1952, vol. 88, pp. 101.
45. Roberts J.E. and Roepstorff G. Some Basic Concepts of Algebraic Quantum Theory. Commun. Math. Phys., 1969, vol. 11, pp. 321–338.
46. Tanabashi M. *at al.* (Particle Data Group). Phys. Rev., 2018, D. vol. 40, 030001. URL: `http://pdg.lbl.gov`.

Дата поступления в редакцию: 24.01.2021